ケプラーの法則

数学的な立場から，ケプラーの法則を考えてみよう。

太陽を原点にとり，適当に座標軸を定める。惑星の時刻 t における座標（位置）を $\overrightarrow{x}=(x,\ y,\ z)$ とする。$x,\ y,\ z$ は t の関数で，$x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t)$ とする。また，速度ベクトルを $\overrightarrow{v}$，加速度ベクトルを $\overrightarrow{\alpha}$ とする。$\overrightarrow{v}=\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt},\ \dfrac{dz}{dt}\right)$，$\overrightarrow{\alpha}=\left(\dfrac{d^2x}{dt^2},\ \dfrac{d^2y}{dt^2},\ \dfrac{d^2z}{dt^2}\right)$ であるが，ここでは，$\dfrac{dx}{dt}$を $\dot{x}$，$\dfrac{d^2x}{dt^2}$を $\ddot{x}$ などで表すことにする。すなわち，$\overrightarrow{v}=(\dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z})$，$\overrightarrow{\alpha}=(\ddot{x},\ \ddot{y},\ \ddot{z})$ で表すことにする。

太陽から惑星までの距離を $r=r(t)$とおくと，$r=\left|\overrightarrow{x}\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ である。

太陽の質量を M，惑星の質量を m とすれば，万有引力の法則により，惑星に働く万有引力は，その大きさが $\dfrac{GMm}{r^2}$（G は比例定数）で，向きは$-\overrightarrow{x}$ と同じである。よって，$-\overrightarrow{x}$ と同じ向きを持つ単位ベクトルが，$-\dfrac{\overrightarrow{x}}{r}$ だから，

$$m\overrightarrow{\alpha}=-\frac{GMm}{r^2}\cdot\frac{\overrightarrow{x}}{r}$$

が成立する。両辺を m で割ると，$(\ddot{x},\ \ddot{y},\ \ddot{z})=-\dfrac{GM}{r^3}(x,\ y,\ z)$ …① となる。

ここで，$F(r)=\dfrac{GM}{r^3}$ とおくと，$\ddot{x}=-F(r)x$，$\ddot{y}=-F(r)y$，$\ddot{z}=-F(r)z$ となる。

このとき，$x\dot{y}-\dot{x}y$，$y\dot{z}-\dot{y}z$，$z\dot{x}-\dot{z}x$ は時間 t に関係しない一定な値となる。

なぜならば，

$$\frac{d}{dt}(x\dot{y}-\dot{x}y)=\dot{x}\dot{y}+x\ddot{y}-(\ddot{x}y+\dot{x}\dot{y})=x\ddot{y}-\ddot{x}y=x\bigl(-F(r)y\bigr)-\bigl(-F(r)x\bigr)y=0$$

だからである。

$y\dot{z}-\dot{y}z,\ z\dot{x}-\dot{z}x$ についても同様である。

そこで，$x\dot{y}-\dot{x}y=\alpha$，$y\dot{z}-\dot{y}z=\beta$，$z\dot{x}-\dot{z}x=\gamma$（$\alpha,\ \beta,\ \gamma$は定数）とおく。

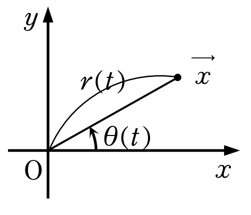
$z(0)=0,\ \dot{z}(0)=0$ と仮定する。（座標軸を，$t=0$ のときの惑星の位置が xy 平面上にあり，そのときの運動の方向の z 成分が 0 となるようにとることができる。）

すると，すべての t に対して，$\beta=0,\ \gamma=0$ が成立する。

$x\dot{y}-\dot{x}y=\alpha\neq0$ とする。ベクトル$(x,\ y)$，$(\dot{x},\ \dot{y})$ は 1 次独立である。この結果，$y\dot{z}-\dot{y}z=0$，$z\dot{x}-\dot{z}x=0$ は，$\dot{z}(x,\ y)-z(\dot{x},\ \dot{y})=(0,\ 0)$ と表されるから，$z=0$，$\dot{z}=0$ であることがわかる。すなわち，初期位置とそのときの速度ベクトルが xy 平面内にあれば，常に xy 平面内にあることになる。

そこで，改めて，$\overrightarrow{x}=(x,\ y)$ とし，$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ とおく。

$r,\ \theta$ともに時間 t の関数で，$r=r(t),\ \theta=\theta(t)$ と考える。



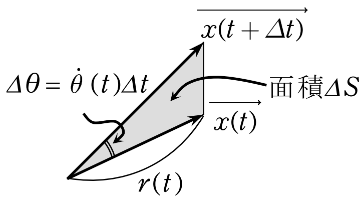
$\dot{x}=\dot{r}\cos\theta-r\sin\theta\cdot\dot{\theta}$，$\dot{y}=\dot{r}\sin\theta+r\cos\theta\cdot\dot{\theta}$ より，

$$\begin{aligned}\alpha&=x\dot{y}-\dot{x}y\\&=r\cos\theta(\dot{r}\sin\theta+r\cos\theta\cdot\dot{\theta})-(\dot{r}\cos\theta-r\sin\theta\cdot\dot{\theta})r\sin\theta\\&=r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\cdot\dot{\theta}=r^2\dot{\theta}\quad\cdots②\end{aligned}$$

右図のような三角形の面積 ΔS は，

$\Delta\theta \fallingdotseq 0$ のとき，$\sin\Delta\theta \fallingdotseq \Delta\theta$ だから，$\Delta\theta = \dot{\theta}\Delta t$ より

$$\Delta S \fallingdotseq \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}\Delta t = \frac{1}{2}\alpha\,\Delta t$$



と表されることから，$\dfrac{dS}{dt} = \dfrac{1}{2}\alpha$（一定）…③ が成立するので，面積速度が一定であることがわかる。

（ケプラーの第２法則）

万有引力の位置エネルギーを U とすると，

$$U = -\frac{GMm}{r}\quad（G \text{ は比例定数}）$$

である。これは，万有引力による仕事量であるから，

$$U = \lim_{R\to\infty}\int_{\mathrm{r}}^{R}\left(-\frac{GMm}{r^2}\right)dr = \lim_{R\to\infty}\left[\frac{GMm}{r}\right]_r^R = \lim_{R\to\infty}\left(\frac{GMm}{R}-\frac{GMm}{r}\right) = -\frac{GMm}{r}$$

より得られる。

よって，$U = -\dfrac{GMm}{r}$，$r = \sqrt{x^2+y^2}$ である。

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}(2x\dot{x}+2y\dot{y}) = \frac{1}{r}(x\dot{x}+y\dot{y})\ \text{より，}$$

$$\frac{d}{dt}U = -GMm\left(-\frac{1}{r^2}\right)\frac{dr}{dt} = \frac{GMm}{r^3}(x\dot{x}+y\dot{y})$$

万有引力の関係式①から，$(\ddot{x},\ \ddot{y}) = -\dfrac{GM}{r^3}(x,\ y)$，すなわち

$\ddot{x} = -\dfrac{GM}{r^3}x$，$\ddot{y} = -\dfrac{GM}{r^3}y$ である。この両辺に，順に $\dot{x}$，$\dot{y}$ をかけると，

$\ddot{x}\dot{x} = -\dfrac{GM}{r^3}x\dot{x}$，$\ddot{y}\dot{y} = -\dfrac{GM}{r^3}y\dot{y}$ となり，この辺々を加えて，

$$\ddot{x}\dot{x}+\ddot{y}\dot{y} = -\frac{GM}{r^3}(x\dot{x}+y\dot{y})$$

ここで m をかけると，$m(\ddot{x}\dot{x}+\ddot{y}\dot{y}) = -\dfrac{GMm}{r^3}(x\dot{x}+y\dot{y}) = -\dfrac{d}{dt}U$ …④ となる。

$\ddot{x}\dot{x}+\ddot{y}\dot{y}$ は，$\dfrac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$ の導関数，すなわち $\ddot{x}\dot{x}+\ddot{y}\dot{y} = \dfrac{d}{dt}\ \dfrac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$ であるから，④より

$\dfrac{d}{dt}\ \dfrac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+U\ = 0$ が成立する。

よって，$\dfrac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+U = E$（定数） …⑤ が成立する。

$\dot{x}^2+\dot{y}^2 = |\vec{v}|^2$ より，$\dfrac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$ は運動エネルギーを表し，この式からエネルギーが保存されていることがわかる。

$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ において，$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\cdot\dot{\theta}$，$\dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\cdot\dot{\theta}$ より，

$$\begin{aligned}\dot{x}^2+\dot{y}^2 &= (\dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\cdot\dot{\theta})^2 + (\dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\cdot\dot{\theta})^2\\ &= \dot{r}^2\cos^2\theta - 2r\dot{r}\cos\theta\sin\theta\cdot\dot{\theta} + r^2\sin^2\theta\cdot\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2\sin^2\theta + 2r\dot{r}\sin\theta\cos\theta\cdot\dot{\theta} + r^2\cos^2\theta\cdot\dot{\theta}^2\\ &= \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\end{aligned}$$

である。r を θ の関数と考えて，$\dot{r} = \dfrac{dr}{dt} = \dfrac{dr}{d\theta}\cdot\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{dr}{d\theta}\dot{\theta}$ を代入すると，

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = \left\{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\right\}\dot{\theta}^2$$

となる。⑤より，$\dot{x}^2+\dot{y}^2=\dfrac{2}{m}(E-U)$ だから

$$\left\{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+r^2\right\}\dot{\theta}^2=\frac{2}{m}(E-U)$$ となる。

また，②において，$r^2\dot{\theta}=\alpha>0$ として，$\dot{\theta}=\dfrac{\alpha}{r^2}$ を代入すると，

$$\left\{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+r^2\right\}\frac{\alpha^2}{r^4}=\frac{2}{m}(E-U)$$

$$\frac{\alpha^2}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+\frac{\alpha^2}{r^2}=\frac{2}{m}\left(E+\frac{GMm}{r}\right)=\frac{2E}{m}+\frac{2GM}{r}\quad\left(\because\quad U=-\frac{GMm}{r}\right)$$

$$\therefore\quad\frac{\alpha^2}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2=\frac{2E}{m}+\frac{2GM}{r}-\frac{\alpha^2}{r^2}$$

$$\therefore\quad\frac{\alpha}{r^2}\cdot\frac{dr}{d\theta}=\pm\sqrt{c_1+\frac{2c_2}{r}-\frac{\alpha^2}{r^2}}$$ （ただし，$\dfrac{2E}{m}=c_1,\ GM=c_2$ とする。）

ここで，$r=\dfrac{1}{u}$ と置換すると，$u=\dfrac{1}{r}$ だから，$\dfrac{du}{d\theta}=-\dfrac{1}{r^2}\cdot\dfrac{dr}{d\theta}$

よって，$-\alpha\dfrac{du}{d\theta}=\pm\sqrt{c_1+2c_2u-\alpha^2u^2}$ …⑥ と表される。

この方程式を満たす u の 1 つは，

$$u=\frac{1}{\alpha^2}\left(c_2+\sqrt{c_1\alpha^2+c_2{}^2}\cos\theta\right)$$

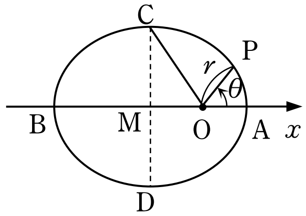
と表される。（ここでは，積分の計算を省略するが，結果を⑥に代入することによって成立することを確かめることができる。）

よって，$r=\dfrac{1}{u}=\dfrac{\alpha^2}{c_2+\sqrt{c_1\alpha^2+c_2{}^2}\cos\theta}=\dfrac{l}{1+e\cos\theta}$ （$l=\dfrac{\alpha^2}{c_2}=\dfrac{\alpha^2}{GM}$，$e=\sqrt{1+\dfrac{c_1\alpha^2}{c_2{}^2}}$）…⑦

$E<0$ より $c_1<0$ となるから，$0<e<1$ で，この曲線は，離心率 e の楕円を表す（楕円の極方程式）。このとき，原点（太陽）が焦点の 1 つである。 **（ケプラーの第 1 法則）**

右図は，O を極とし，AB が長軸，CD が短軸である極方程式⑦で表される楕円とする。$\theta=0,\pi$ のとき，楕円の頂点 A，B を表すから，長軸 AB の長さは，

$$\mathrm{OA}+\mathrm{OB}=\frac{l}{1+e}+\frac{l}{1-e}=\frac{2l}{1-e^2}$$



よって，長半径（長軸の長さの半分）a（$=\mathrm{AM}$）は，$a=\dfrac{l}{1-e^2}$ である。また，短半径（短軸の長さの半分）b（$=\mathrm{CM}$）は，$b^2=\mathrm{OC}^2-\mathrm{OM}^2=a^2-a^2e^2$ だから $b^2=\dfrac{l^2}{1-e^2}=la$ より，$b=\sqrt{la}$ である。

楕円の面積 S は，$S=\pi ab$（a は長半径，b は短半径）で表されるから，

$$S=\pi a\sqrt{la}=\pi\sqrt{l}\,a^{\frac{3}{2}}$$

である。面積速度が一定で，③より $\dfrac{dS}{dt}=\dfrac{1}{2}\alpha$ であるから，惑星の周期 T は，

$$T=\frac{2S}{\alpha}=\frac{2\pi\sqrt{l}}{\alpha}a^{\frac{3}{2}}=\frac{2\pi}{\sqrt{GM}}a^{\frac{3}{2}}\quad\left(l=\frac{\alpha^2}{GM}\right)$$

$$\therefore\quad\frac{T^2}{a^3}=\frac{4\pi^2}{GM}\ （一定）$$

と表される。ゆえに，惑星の公転周期 T の 2 乗は，楕円軌道の長半径 a の 3 乗に比例する。

（ケプラーの第３法則）

ケプラーの法則を数学的に取り扱うと，以上のようになる。

物理や化学における公式のほとんどが，数学的にこのように証明できる。上でわかるように，数学的に厳密に取り扱おうとすると，高度な数学の知識が必要になる場合が多く，物理や化学の教科書はその辺を配慮して作成されている。しかし，公式の中には，簡単な微分積分法で導けるものも少なくない。高校で学習する物理や化学の公式を，もう一度，数学の目で見直してみるのもおもしろいのではないだろうか。